

Rechtlicher Hinweis

© Werner Schneider und den zitierten Autoren bzw. ihren Verlagen.

Das Material wird ausschließlich für wissenschaftliche und unterrichtliche Zwecke zur Verfügung gestellt. Sie sind auf der sicheren Seite, wenn Sie es behandeln wie Material aus einer Bibliothek: danach können Sie bis zu sieben Kopien zum privaten Gebrauch ziehen.

Alle darüber hinausgehenden Verwertungsrechte bleiben unberührt.

Technischer Hinweis

Aus technikhistorischen Gründen sind die Fonts nur für den Ausdruck, nicht jedoch die Bildschirmdarstellung optimiert.

Aber nun viel Spaß und erfrischende Adrenalinschübe!

;-) Werner und die Drachen

Schmetterlingseffekt oder “Das Elektron am Rande des Universums”

- (431p¹⁹¹⁻¹⁹²) M. Berry(1978): Regular an irregular motion in S. Jorna(Hrsg.), Topics in nonlinear dynamics. A tribute to Sir Edward Bullard, American Institute of Physics, New York p¹⁶⁻¹²⁰
- Nach Ideen vom Borel und Chirikov. Gravitation eines weit entfernten Körpers S wirkt auf zwei stoßende elastische Kugeln leicht unterschiedlich. An- oder Abwesenheit des fernen Körpers macht kleinen Unterschied in den Bahnwinkeln der Kugeln, die sich bei jeder Folgekollision um etwa l/r vervielfältigt (l = Weglänge, r = Kugelradius): exponentielles Wachstum der Abweichung. Sei n die Zahl von Kollisionen, bei denen die Winkelabweichung 1 *radian* übertrifft; danach haben die Bahnen sicher nichts mehr miteinander zu tun. Klassisch gerechnet:
- S Elektron, 10^{10} LJ von Sauerstoffatomen K_1, K_2 ; Druck, Temperatur normal $\Rightarrow n = 56$
- S Mensch, 1 m von Billardkugeln K_1, K_2 ; auf Billardtisch $\Rightarrow n = 9$.
- im Falle der Billardkugeln folgt rein aus Quantenmechanik $n = 15$

Weiches Chaos in Biologie, Ökologie, Ökonomie und in Sozialwissenschaften:

- (431p⁸¹) “Qualitative Studien von Chaos in einem System verlangen ein quantitatives Verstehen der Dynamik des Systems.” Dieses erfordere entweder gut bekannte, relativ einfache Grundgleichungen, wie beim Sonnensystem, der Hydrodynamik und sogar der Meteorologie, oder ausreichende statistische Evidenz, wie bei oszillierenden chemischen, wo die Grundgleichungen unbekannt sind, wir aber aus den mit hoher Präzision und ziemlich störungsfrei gemessenen Zeitreihen die Dynamik gut rekonstruieren können.
- (431p⁸¹⁻⁸²) “In der Biologie und in den ‘weichen’ Wissenschaften kennen wir keine guten grundlegende Bewegungsgleichungen (und Modelle, die qualitativ mit den Daten übereinstimmen, sind nicht gut genug). Es ist schwierig, lange Zeitreihen mit guter Genauigkeit zu bekommen, und üblicherweise ist die Dynamik nicht einfach. Darüber hinaus p⁸² verändern sich in vielen Fällen (Ökologie, Ökonomie, Sozialwissenschaften) die grundlegenden Evolutionsgleichungen, was auch immer diese sind, langsam mit der Zeit (weil das System ‘lernt’). Die Auswirkung von Chaos auf solche Systeme bleibt also für den Augenblick mehr auf dem Niveau wissenschaftlicher Philosophie als auf dem einer quantitativen Wissenschaft. Aber Fortschritt ist möglich. Denken Sie daran, dass Poincarés Überlegungen über Vorhersagbarkeit in der Meteorologie nur wissenschaftliche Philosophie waren und dass dieser Bereich heute quantitative Wissenschaft geworden ist.”

Laplacescher Dämon

- (431p²⁷) Die Formulierung des laplaceschen Dämons: “Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennt, durch welche die Natur belebt wird, und die entsprechende Lage aller Teile, aus denen sie zusammengesetzt ist, und die darüber hinaus breit [*in vino veritas*] genug wäre, um alle diese Daten einer Analyse zu unterziehen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Körper des Universums und die des kleinsten Atoms umfassen. Für sie wäre nichts ungewiss, und die Zukunft ebenso wie die Vergangenheit wäre ihren Augen gegenwärtig. Der menschliche Verstand, in der Perfektion, die er in der Lage war, der Astronomie zu geben, [*sintemalen in Form des Ms. Laplace*] stellt ein schwaches Abbild dieser Intelligenz dar.”
- (431p²⁸) Ruelle merkt an, dass es keine logische Unverträglichkeit zwischen Zufall und Determinismus gibt. Denn der Zustand eines Systems zur Anfangszeit kann anstatt genau festgelegt auch zufällig sein. In einer mehr technischen Sprechweise kann der Anfangszustand unseres Systems eine gewisse *Wahrscheinlichkeitsverteilung*

lung haben. Ist das der Fall, dann wird das System auch zu jeder anderen Zeit zufällig sein, und diese Zufälligkeit wird durch eine neue Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben, die deterministisch mit Hilfe der mechanischen Gesetze abgeleitet werden kann. In der Praxis ist der Zustand eines Systems zur Anfangszeit niemals mit vollkommener Genauigkeit bekannt: wir müssen für den Anfangszustand immer ein bisschen Zufälligkeit zulassen.”

Sensibles Billard

(431)

Beispiel für ein einfaches System, das sensibel gegenüber den Anfangsbedingungen ist: Billardspiel mit runden oder konvexen Hindernissen. Idealisierung: keine Rotation, keine Reibung, rein elastische Stöße, geradlinig-gleichförmige Bewegung der Mittelpunkt, Reflexion wie Lichtstrahlen am Spiegel.

Betrachte zwei Bälle vom gleichen Ausgangspunkt, deren Bahnen sich um einen winzigen Winkel α unterscheiden. Der Abstand dieser Bälle wächst proportional zur Zeit; Reflexion an geradlinigen Hindernissen ändert nichts an diesem Sachverhalt. Bei der Reflexion an einem *runden* Hindernis *vergrößert* sich jedoch der Winkel der beiden Bahnen um einen bestimmten Faktor, sodass wir, genügend solcher Hindernisse vorausgesetzt, eine Annäherung an exponentielles Wachstum der Abstände haben.

Unvorhersagbarkeit gespenstert schon das ganze 19. Jhd durch die Physik! (431)

Hadamard

Ende des 19. Jhds Jacques Hadamard: reibungsfreie Bewegung eines Punktes auf einer Fläche mit negativer Krümmung, auch “geodätischer Fluss” genannt. Hadamard bewies die Empfindlichkeit der Bahn von den Anfangsbedingungen und wies explizit auf die daraus entspringende Unvorhersagbarkeit hin.

Duhem

Als nächste griff der Physiker Pierre Duhem dieses Beispiel auf als “für immer nutzlose mathematische Deduktion”. Für immer nutzlos, “weil eine kleine Unsicherheit, die notwendigerweise für die Anfangsbedingungen auftritt, für die vorhergesagte Bahn zu einer großen Unsicherheit führen wird, wenn wir lange genug warten; und das macht die Vorhersage nutzlos.”

Poincaré(1908)

in “Wissenschaft und Methode”. Ruelle: (431p⁴⁸⁻⁴⁹) “Ein wesentlicher Gesichtspunkt, p⁴⁹ den Poincaré vorbringt, ist, dass Zufall und Determinismus durch die Langzeit-Unvorhersagbarkeit versöhnt werden.” Poincaré: “Eine sehr kleine Ursache, die uns entgehen mag, bewirkt einen beachtlichen Effekt, den wir nicht ignorieren können, und dann sagen wir, dass dieser Effekt auf Zufall beruht.” Poincaré diskutiert das an zwei Beispielen:

(431p⁴⁹⁻⁵⁰)

“Das erste ist ein Gas, das aus vielen Molekülen besteht, die mit großer Geschwindigkeit in alle Richtungen fliegen und sich häufig stoßen.” Zweites Beispiel die Meteorologie: “Für einen Spezialisten unserer Tage ist das Überraschendste an Poincarés Analysis, wie modern sie ist. Gerade von dem Gesichtspunkt aus, die Poincaré eingenommen hatte, waren in den letzten Jahren die Dynamik eines aus harten Kugeln bestehenden p⁵⁰ Gases einerseits und die Zirkulation der Atmosphäre andererseits die vordringlichsten Studienobjekte.

Ebenso verblüffend ist der große Zeitabstand zwischen Poincaré und modernen Untersuchungen der empfindlichen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen durch die Physiker. Als die damit zusammenhängenden Ideen wieder zum Vorschein kamen und das entstand, was man heute die Chaostheorie nennt, da spielte die physikalische Einsicht von Hadamard, Duhem und von Poincaré keine Rolle in diesem Prozess. Poincarés Mathematik (oder was daraus geworden ist) hat eine Rolle gespielt, aber seine Ideen zur Wettervorhersage mussten auf andere Weise entdeckt werden.

... Zwei Gründe für diese rätselhafte historische Lücke. Der erste ist das Aufkommen der Quantenmechanik.”

Der zweite Grund “warum die Ideen von Hadamard, Duhem und Poincaré in Vergessenheit gerieten: diese Ideen sind zu früh gekommen. Die Werkzeuge, um sie auszuwerten, existierten nicht.” Vor allem habe die Maßtheorie und der Ergodensatz nicht zur Verfügung gestanden, weswegen Poincaré seine Ideen damals noch nicht habe präzisieren können. Auch nehmen wir heute bei Versagen der Mathematik Zuflucht beim Computer.

Ein Chaos-Dämon

(431p⁷⁶⁻⁷⁹)

Wettervorhersage an Hand von Satellitenbildern: ein bis zwei Tage im Voraus. Darüber hinaus: Gittermodelle der allgemeinen atmosphärischen Grob-Entwicklung für einige Wochen.

Wie ein kleines Teufelchen “durch eine unmerkliche Manipulation ihren sorgfältig geplanten Lebenslauf durcheinander bringt”: “Unser kleines Teufelchen, eine Anregung des britischen Physikers Michael Berry, wird für einen Augenblick die anziehende Wirkung eines Elektrons, das irgendwo an den Grenzen des bekannten Universums sitzt, auf unsere Luftmoleküle außer Kraft setzen. Davon werden Sie natürlich nichts merken. Aber diese winzige Ablenkung der Luftmoleküle bedeutet einen Wechsel der Anfangsbedingungen. Lassen Sie uns die Luftmoleküle als elastische Kugeln idealisieren und uns fragen, indem wir uns auf eine davon konzentrieren, nach wieviel Stößen ... diese ein anderes Molekül verfehlt, das sie getroffen hätte, wäre die Gravitationswirkung des weit entfernten Elektrons in Aktion gewesen. Michael Berry (der damit eine frühere Berechnung des französischen Mathematikers Emile Borel aufgriff) hat ausgerechnet, dass man nur ca. 50 Stöße brauchen würde! Also wären die Zusammenstöße der Luftmoleküle nach einem winzigen Bruchteil einer Sekunde sehr verschieden geworden, aber der Unterschied ist für Sie nicht sichtbar. Noch nicht.

Nehmen wir an, dass die Luft, die wir betrachten, in turbulenter Bewegung ist (alles, was Sie brauchen, ist ein bisschen Wind), dann wird die empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, die in der Turbulenz vorhanden ist, auf die mikroskopischen Fluktuationen von der Art, wie sie das kleine Teufelchen hergestellt hat ... wirken und sie vergrößern. Das nette Ergebnis ist dann, dass nach ungefähr einer Minute das Aussetzen der Gravitationswirkung eines Elektrons am Rande unseres Universums einen makroskopischen Effekt hervorgebracht hat: die Feinstruktur der Turbulenz (auf einer Skala vom Millimetern) ist nicht mehr länger genau dieselbe. Allerdings merken Sie immer noch nichts. Noch nicht.

Aber eine Veränderung in der kleinskaligen Turbulenzstruktur wird Veränderungen in der großskaligen Struktur nach sich ziehen... Man kann die Zeit mit Hilfe der Kolmogorov-Theorie abschätzen... Nehmen Sie an, dass wir in einem turbulenten Teil der Atmosphäre sind... In wenigen Stunden [hat] die unmerkliche Manipulation des kleinen Teufelchens eine Veränderung der atmosphärischen Turbulenz auf einer Skala von Kilometern hervorgebracht... Die Gestalt der Wolken ist verschieden und die Windstöße folgen einem ganz anderen Muster...

... Immer noch eine ziemlich unbedeutende Veränderung der Anfangsbedingungen. Aber wir wissen, dass nach ein paar Wochen die Veränderung globale Proportionen angenommen haben wird.

Nehmen Sie dann, dass Sie ein Wochenend-Picknick mit Ihrem Herzliebsten oder mit Ihrer Chefin geplant haben. Gerade als Sie Ihr Tischtuch auf dem Gras ausgebreitet haben, beginnt ein wirklich bösertiger Hagelschauer...”

Nichtintegrale dynamische Systeme: klassisch und quantenmechanisch**Prigogine/Stengers Das Zeitparadoxon(410)**

(410p¹⁵¹) “Das grundlegende Problem in der klassischen Dynamik ist das Problem der *Integration*” der Bewegungsgleichungen. Wir “möchten explizite Ausdrücke für Variablen wie Koordinaten oder Geschwindigkeiten als Funktionen der Zeit erhalten.” Bis Henri Poincaré gegen Ende des 19. Jahrhunderts nachwies, dass dies unmöglich ist, galten alle dynamischen Systeme als gleich. “Beim Übergang von einfacheren Problemen wie dem ... Zweikörperproblem zu komplexeren wie dem Dreikörperproblem sollte es nur angeblich ‘technische Schwierigkeiten’ geben. Wir wissen heute, dass das nicht zutrifft. Es gibt zwei Arten von Systemen, ‘integrale’ und ‘nichtintegrale Systeme’. Bei den integralen Systemen können wir ... die Wechselwirkungen eliminieren und das Problem auf das der freien bewegung reduzieren. Dann ist es natürlich nicht schwierig, die Orte und Geschwindigkeiten als explizite Funktionen der Zeit zu erhalten.”

(410p¹⁵²) “Bei nichtintegralen System [sehen wir uns] genötigt ..., die Beschreibung durch Trajektorien aufzugeben und zu einer *probabilistischen Beschreibung* überzugehen.”

Diese übersteigt nach Prigogine den bei der Reduktion der quantenmechanischen Wellenfunktion auftretenden Probabilismus; er ist elementarer und wird durch die mathematische Beschreibung sozusagen erzwungen. (410p²³³⁻²³⁵) In der naiven Quantenmechanik ist die Entwicklung der Wellenfunktionen nach der Schrödingergleichung “deterministisch” im gleichen Sinne wie die Trajektorien der naiven klassischen Mechanik.

Nicht-integrale Systeme spielen nun aber sowohl in der klassischen wie in der Quantenmechanik eine entscheidende Rolle: das heißt, dass nicht nur die klassischen Trajektorien, sondern auch die zeitliche Entwicklung der quantenmechanischen Wellenfunktion (unabhängig von jeder Messung) probabilistisch betrachtet werden muss.

Nichtlineare Phasenkopplung

(529p²⁹⁶) Leibniz illustriert die prästabilierte Harmonie mit dem Gleichnis zweier ganggleicher Uhren. Diese können sich wechselseitig synchronisieren, von außen synchron gehalten werden oder von vornherein so perfekt sein, dass sie von alleine synchron bleiben, in prästabiler Harmonie. Für den ersten Fall greift er auf ein Experiment von Huyghens zurück:

Huygens “hatte nämlich zwei große Pendeluhr an ein und demselben Stück Holz befestigt; die unaufhörlichen Schläge dieser beiden Uhren hatten nun den Holzteilchen ähnliche Schwingungen mitgeteilt; da jedoch diese verschiedenartigen Schwingungen nicht so recht in ihrer Ordnung und ohne wechselseitige Hemmung fortbestehen konnten, wofern die Uhren sich nicht einander anpassten, so kam es durch eine Art Wunder dahin, dass, wenn man selbst ihre Schläge mit Willen störte, sie doch bald wieder von neuem zusammenschlugen, ungefähr wie zwei Saiten, die auf denselben Ton gestimmt sind.”